Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский Томский политехнический Университет»

Инженерная школа ядерных технологий

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

**Лабораторная работа № 4**

## Вариант 24

по дисциплине:

**Численные методы**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Исполнитель:** |  | | | | |
| студентка группы | 0В01 |  | Саматов Денис Сергеевич |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
| **Руководитель:** |  | | | | |
| преподаватель |  |  | Крицкий Олег Леонидович |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Томск – 2022

**Задание:** Найти решение задачи Коши:

Область: *x* ≤ 3, *y* ≤ 4.

**Теоретическая часть:**

**Численное вычисление производных**

Пусть задана сетка значений аргумента , *i* = 0, 1, …, *n*, - шаг.

Рассмотрим разностные функции:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (1) |
|  |  |
| . | (2) |

Докажем, что каждая из них является сеточным аналогом первой производной некоторой функции . В окрестности точки *xi* по формуле многочлена Тейлора имеем:

,

.

Вычислим . Отсюда:

.

Аналогично, . Отсюда:

.

Если нужно повысить точность вычислений первой производной, придется рассмотреть среднее слагаемых и :

.

Учитывая выражения для и , получаем:

.

**Замечание**: принято называть – правой первой разностной производной, – левой первой разностной производной, – цетральной первой разностной производной.

**Разностные схемы решения уравнений в частных производных.**

Основная идея состоит в том, что после замены дифференциального уравнения его конечно-разностной аппроксимацией получаются формулы, явно выражающие значения решения для одного расчетного временного слоя через значения решения на предыдущем временном слое. Таким образом, если известно решение в начальный момент времени, можно шаг за шагом (послойно) найти решение для всех последующих моментов.

Для решения задачи необходимо найти с помощью численных методов значения производных искомой функции в узлах сетки.

Формула для нахождения производной по *x*:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (3) |

где – частная производная по , – значение функции в точке сетки с координатами , – значение функции в точке сетки с координатами – шаг сетки по оси .

Формула для нахождения производной по *y*:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (4) |

где – частная производная по , – значение функции в точке с координатами , – значение функции в точке сетки с координатами – шаг сетки по оси .

**Практическая часть**

Первоначально построим область для решения задачи Коши, рис. 1.

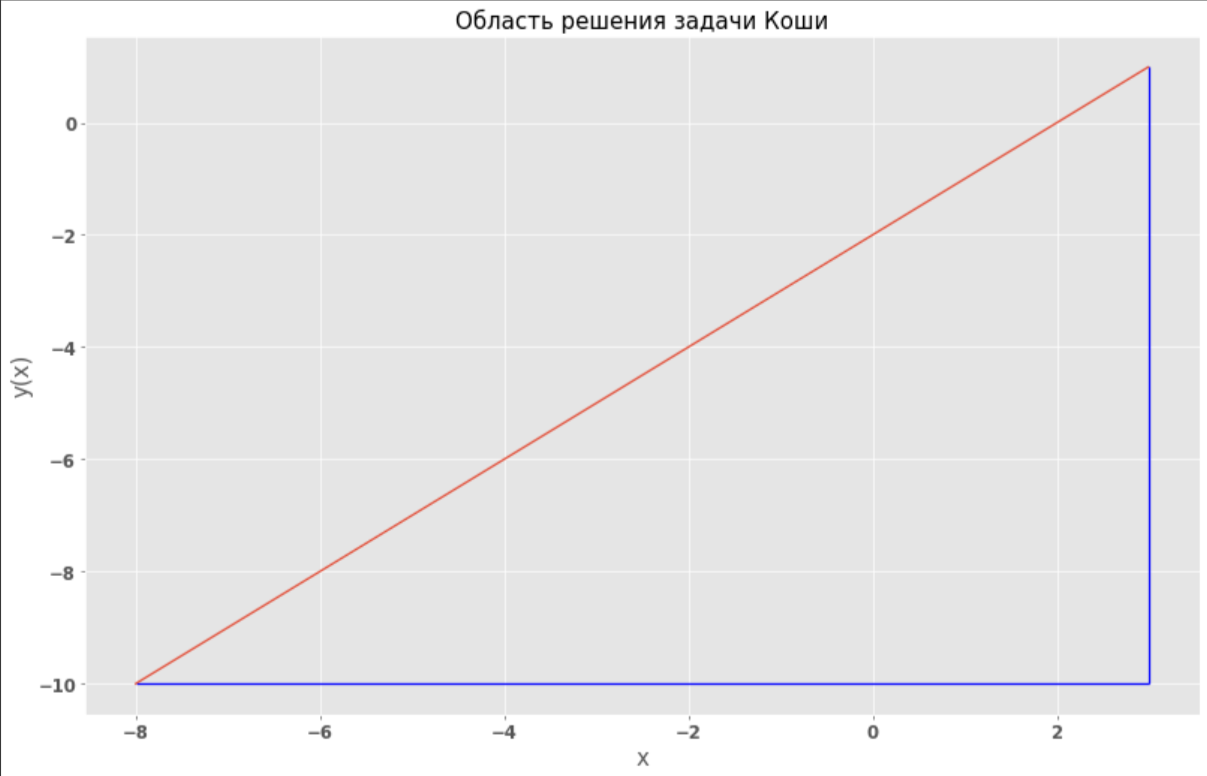


Рисунок 1 - Область решения задачи Коши

Теперь построим сетку на данной области и выберем способ нахождения значений решений в узлах сетки.

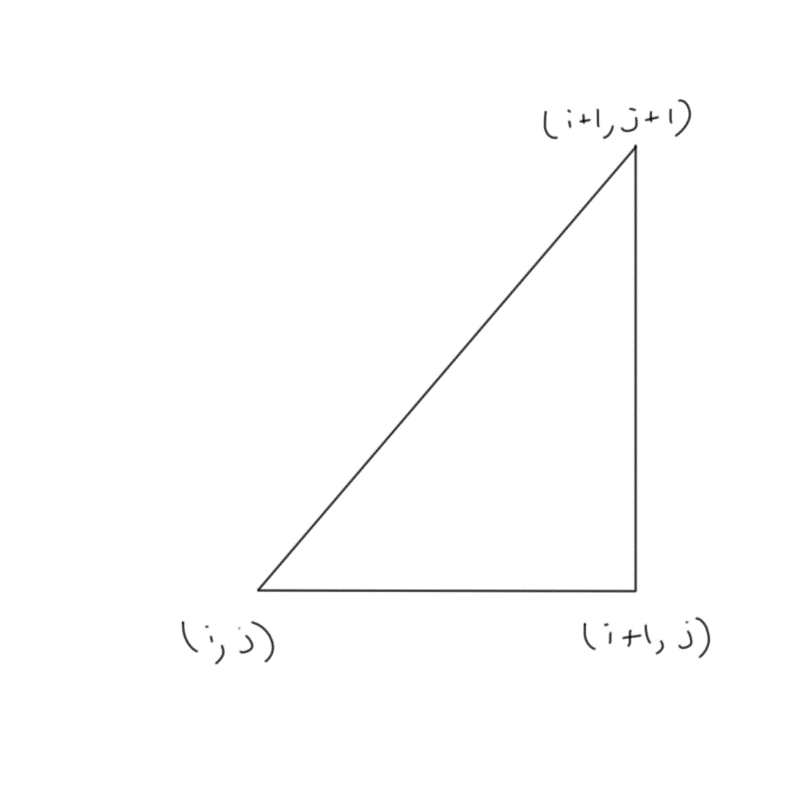
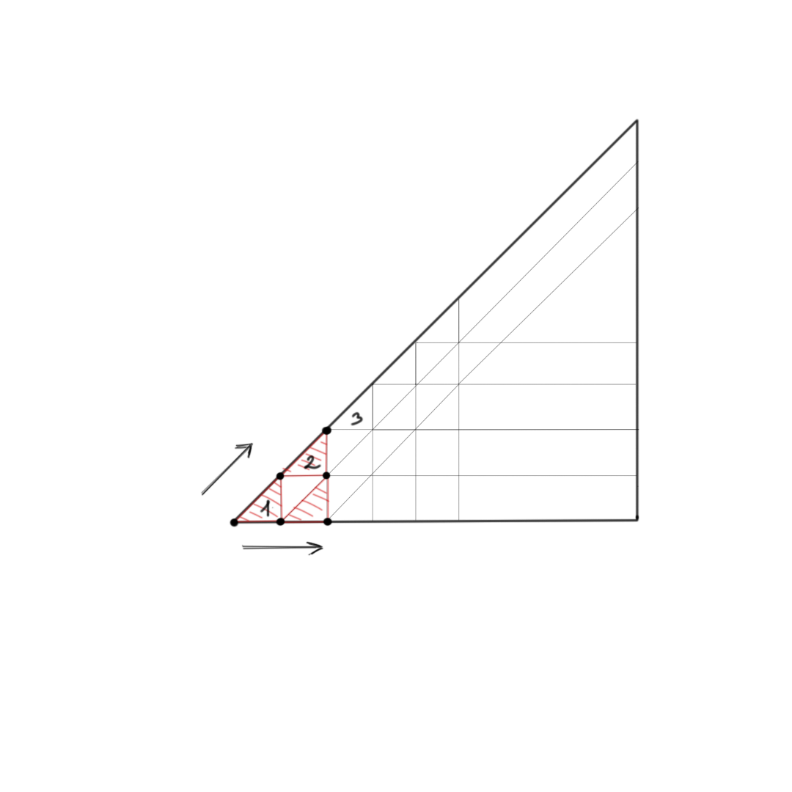


Рисунок 2 – Способ нахождения значений решений в узлах сетки

Расчет значений в последующих узлах будет реализован по такому алгоритму: мы будем перемещать схему на рис. 2 по гипотенузе снизу вверх с последующим сдвигом к прямому углу области решения. Данный способ нахождения значений решения выбран, потому что из устройства данного дифференциального уравнения в частных производных и численных формул частных производных можно довольно просто выразить необходимую точку, находящуюся в вершине прямого угла прямоугольного треугольника.

**Вывод:**

В ходе выполнения лабораторной работы был реализован разностный метод нахождения решения задачи Коши для дифференциального уравнения в частных производных.

**Приложение А**

Файл *main.m*

clc, clearvars, close all, format compact

a = -8; b = 3;

c = -10; d = 1;

n = 1000;

hx = (b - a) / n; hy = (d - c) / n;

x = a:hx:b; y = c:hy:d;

ans = find\_solution(x, y, hx, hy);

Файл *find\_solution.m*

function u = find\_solution(x, y, hx, hy)

u = zeros(length(x), length(y));

for i = 1:length(x)

u(i,i) = 1 - 2 \* x(i);

end

for diag = 1:length(x)

for i = diag:length(x)-1

j = i-diag+1;

u(i+1,j) = (u(i,j) \* (2 - (u(i,j) - x(i)) / hx) + u(i+1,j+1) \* (y(j) - u(i,j)) / hy) / ...

((x(i) - u(i,j)) / hx + (y(j) - u(i,j)) / hy);

end

end

end